

# EL GRUPO

## GUIA EL PENSAMIENTO CIENTIFICO

El grupo es una noción extremadamente fundamental. Un grupo es esencialmente un conjunto dotado de una ley de composición que debe satisfacer tres condiciones.

Antes de detallar, en honor al inmortal Evaristo Galois presentaré algunos rasgos sobresalientes de la vida del genial matemático francés cuya madurez extraordinaria a muy temprana edad asombró a muchos. Su teoría de grupos conocida como la teoría de Galois penetró profundamente en la esencia de las ecuaciones algebraicas e iluminó el problema de la solución por extracción de raíces. Matemáticos y físicos siguen, actualmente encontrando nuevas aplicaciones de los grupos.

La vida de este verdadero iluminado finalizó muy rápidamente. Nació Galois el 25 de Octubre de 1811 en Bourg-La-Reine, a un paso de París, publicó su primer trabajo matemático cuando estudiaba aún en el Liceo Louis-Le-Grand en 1828.

Galois intentó entrar en la Escuela Politécnica de París. Sin embargo, como él mismo dijo, las preguntas del examen de admisión de la célebre escuela le parecieron tan fáciles que consideró denigrante contestarlas. No fue admitido pero cabe destacar que él estaba poseído por una prisa tan grande de abalanzarse sobre los problemas más elevados, que abandonó sus estudios de matemáticas elementales y emprendió el estudio de obras de grandes matemáticos.

Galois tuvo muchos reveses que lo lastimaron mucho. El logró su admisión en la famosísima Escuela Normal Superior de París; sin embargo ya le había atraído la situación política de la época. Esa política le hizo ver al mundo gobernado por la bajeza y la injusticia. El sufrió expulsión de esa escuela. El joven, de 19 años entonces, se dedicó de lleno a agitaciones políticas condenadas por el gobierno, siendo encarcelado por varios meses.

Un año más tarde, el 30 de Mayo de 1832 finalizó su vida (veinte años y medio) en un

Ing. Dr. Armando Hernández

duelo provocado por un maltrato a una indefensa. La noche anterior al duelo los desarrollos sobre el grupo, apenas formados en su mente, los expuso en una carta de despedida a su amigo Chevalier. Cabe reiterar que matemáticos y físicos siguen actualmente encontrando nuevas aplicaciones a la teoría de Galois.

La idea de grupo permitió a Gastón Bachelard abordar los dilemas de la filosofía geométrica en su pequeña pero gran obra "Le nouvel esprit scientifique". Para no extrañar la filosofía geométrica, citaremos la geometría algébrica.

Téngase presente que el universo está impregnado de geometría y más precisamente de geometrías. La prodigiosa evolución de la filosofía geométrica desde hace un siglo se ha debido a la dialéctica científica y al esfuerzo de síntesis.

La noción de estructura se ha convertido desde hace unas décadas en una de las nociones más importantes. Las tres estructuras fundamentales sobre las cuales reposa el edificio matemático, según los siempre jóvenes Bourbaki, son las estructuras algébricas, cuyo prototipo es el grupo, las estructuras de orden, de las cuales una variedad es la red, y las estructuras topológicas.

En la primera publicación colectiva de la Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la enseñanza de las Matemáticas, M. Jean Piaget, profesor en las Universidades de Ginebra y París, abordó las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. El gran psicólogo y matemático se refirió en esa publicación a la estructura operatoria en que la operación es una acción. Con M. Piaget, quien practicó la psicología con sus hijos a partir del nacimiento, resulta fácil comprender que la inteligencia aparece esencialmente como una coordinación de las acciones.

La reversibilidad constituye sin duda la ley fundamental de las composiciones propias de la inteligencia. La reversibilidad se presenta desde el comienzo de la vida bajo dos formas complementarias e irreducibles: la inversión o negación y la reciprocidad. Valdría la pena precisar las nociones de inversión y de reciprocidad pero quizá sea preferible avanzar por razones de espacio.

Las estructuras algébricas, y principalmente la de grupo, corresponden a los mecanismos operatorios de la inteligencia regidos por la inversión o negación (el producto de una operación por su inversa es la operación idéntica o transformación nula).

Grupos abstractos. En el primer párrafo quedó pendiente detallar tres condiciones. La primera condición es que la ley de composición del conjunto para estructurar un grupo debe ser asociativa. La segunda condición es que debe existir un elemento neutro (un elemento más cero es igual a cero más ese elemento; un elemento multiplicado por uno es igual a uno multiplicado por ese elemento, etc) y la tercera condición es la existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto ( $a$  y menos  $a$ ,  $a$  y  $1/a$ , etc).

•El grupo se llama abeliano (en honor a Niels Hendrik Abel) si la ley de composición es conmutativa.

A pesar de haber sido tardío el descubrimiento de la noción de grupo como ser matemático, esta estructura sigue penetrando en la ciencia moderna.

Ya vimos que en la operación idéntica, la transformación es nula. Se conoce la forma matemática por sus transformaciones. A tal punto que se podría decir al ser matemático con Bachelard: "Díme cómo te transformas y te diré quién eres". La llave de la evidencia es por consiguiente la forma algébrica. El álgebra amasa todas las relaciones. Las diversas geometrías son equivalentes algébricamente.

Cada geometría, euclidiana (Euclides) o no euclidiana (Lobatschewsky, Riemann, etc) está caracterizada por un grupo especial de transformaciones.

En la geometría euclidiana los desplazamientos (transformaciones) forman un grupo. Toda geometría no euclidiana no obedece al grupo de la geometría euclidiana sino a su propio grupo.

Los físicos modernos también están aprovechando la teoría de Galois. Así por ejemplo, el objeto elemental de la microfísica no es un sólido. Las partículas eléctricas no pueden seguir considerándose como verdaderos sólidos. La partícula se deforma con el movimiento. La transformación matemática es la transformación de Lorentz, transformación que no admite el grupo de desplazamientos característicos de la geometría euclidiana.

El grupo es pues el guía del pensamiento científico. Alrededor de un grupo matemático se puede siempre coordinar una experiencia científica.

París, 22-XII-1974.

